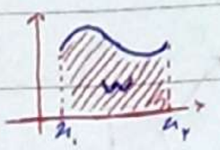
فصل ۷

/ /

انرژی جنبشی: $k = \frac{1}{2}mv^2$

کار: $w = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} \xrightarrow[F=cte]{\text{حالت خاص}} w = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd\cos\theta$



توان: $P = \frac{dw}{dt}$ یا $\frac{w}{\Delta t} \xrightarrow{\text{حالت خاص}} P = \frac{dw}{dt} = \frac{Fdx}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{V}$ یا $Fv\cos\theta$

قانون کار و انرژی جنبشی: $w = \Delta k = k_f - k_i$

نکته: کار برآیند با توجه به $w=\Delta k$ در فرآیندی که از حالت سکون شروع و به حالت سکون ختم می‌شود برابر صفر است.

محاسبه کار انجام شده توسط نیروی گرانش: نیروی گرانش $F = mg \xrightarrow{} w = mgd\cos\theta$

۱) حرکت به سمت بالا: $w = mgd\cos 180 = -mgd$

۲) حرکت به سمت پایین: $w = mgd\cos 0 = mgd$

کار انجام شده توسط نیروی فنر: $w = \int \vec{F}\cdot d\vec{x}$ ①، اندازه نیروی فنر: $F = kx$ ② $\xrightarrow{\frac{①}{②}} w = \int kx\,dx\cos\theta = -k\int x\,dx = -\frac{1}{2}kx^2$

مثال: پدر و پسری با هم مسابقه می‌دهند. انرژی جنبشی پدر نصف انرژی جنبشی پسر و پسر نصف پدر جرم دارد. وقتی که پدر به اندازه $1\,m/s$ به سرعت خود اضافه می‌کند همان انرژی جنبشی پسر را بدست می‌آورد. تندهای اولیه پدر و پسر را محاسبه کنید.

$m_s = \frac{1}{2}m_f$ ، $k_f = \frac{1}{2}k_s$

$k_f = \frac{1}{2}k_s \to \frac{1}{2}m_f v_f^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_s v_s^2$

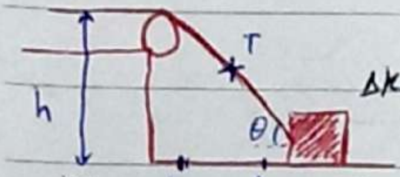
$\to \frac{1}{2}m_f v_f^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_f v_s^2 \Rightarrow v_s^2 = 4v_f^2 \to v_s = 2v_f$ / $k_f = k_s \to \frac{1}{2}m_f(v_f+1)^2 = \frac{1}{2}m_s v_s^2$

$\frac{1}{2}m_f(v_f+1)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_f v_s^2 \Rightarrow 2v_f^2 + 4v_f + 2 = 4v_f^2 \Rightarrow v_f^2 - 2v_f - 1 = 0 \Rightarrow v_f = \ldots$

Scanned by CamScanner

/ /

مثال: در سیستم شکل زیر وقتی جسم از نقطه ۱ تا ۲ روی سطح بدون اصطکاک می‌لغزد با فرض معلوم بودن کشش نخ تغییر انرژی

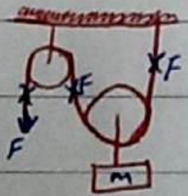


جنبشی طی این حرکت را بیابید. ج: $\Delta K = W = \int F\cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} T\,dx = \int_{x_1}^{x_2} T\cos\theta\,dx$

$$= \int_{x_1}^{x_2} T\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+h^2}} = -T\int_{x_2}^{x_1}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+h^2}} = -T\sqrt{x^2+h^2}\Big|_{x_2}^{x_1} = T\left(\sqrt{x_2^2+h^2}-\sqrt{x_1^2-h^2}\right)$$

مثال: در شکل زیر الف) اگر بخواهیم وزنه را با تندی ثابتی بالا ببریم بزرگی F را بدست آورید ج: ب) برای بالا بردن وزنه به اندازه‌ی

۲cm طرف آزاد ریسمان را چقدر باید بکشیم ج: پ) در حین بالا بردن کار انجام شده روی وزنه توسط نیروی وارد به ریسمان



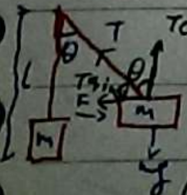
چقدر است ج: ت) نیروی گرانش چقدر است ج: الف) $\Sigma F = 0 \Rightarrow 2F - mg = 0 \Rightarrow F = \frac{1}{2}mg$

ب) $2cm + 2cm = 4cm$ / پ) $W = \vec{F}\cdot\vec{d}\cos\theta = \frac{1}{2}mgd$ / ت) $\Rightarrow W = mgd\cos 180 = -mgd$

$\theta = 0 \Leftarrow$ نقطه اثر

مثال: جعبه‌ای به جرم m از انتهای ریسمانی به طول l آویزان است با نیروی متغیر F جعبه را به جلو حرکت می‌دهیم تا

به اندازه ۳ به جلو حرکت کند و متوقف شود. الف) بزرگی F وقتی جعبه در نقطه نهایی است ج: ب) کار کل انجام شده روی جعبه در طی



جابجایی ج: پ) کار نیروی گرانش روی جعبه طی جابجایی ج: ت) کار نیروی کشش نخ ج: ث) کار نیروی F ج:

الف) $\Sigma F = 0 \Rightarrow \begin{cases} x: F = T\sin\theta \\ y: mg = T\cos\theta \end{cases} \Rightarrow tg\,\theta = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mg\,tg\,\theta$

چون در ابتدا ساکن و در انتها نیز ساکن بوده

ب) $W = \Delta K \rightarrow K_f - K_i = 0$ / پ) $W = F\cdot d = mg(l - l\cos\theta)\cdot\cos 180 = -mgl(1-\cos\theta)$

ت) $\vec{W}_T = \vec{T}\cdot d = T\times d\cos 90 = 0$ / ث) $W_t = W_T + W_{mg} + W_F \Rightarrow W_F = -W_{mg} = mgl(1-\cos\theta)$

Scanned by CamScanner

فصل ۸: انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی

نیروی پایستار: اگر یک نیرو روی یک جسم کار انجام دهد و طی آن مقداری انرژی از جسم گرفته شود، نیرو پایستار است. و اگر فرآیند را برعکس کنیم همان انرژی به جسم برگردد. مانند نیروی گرانش و فنر که پایستار است ولی اصطکاک پایستار نیست.

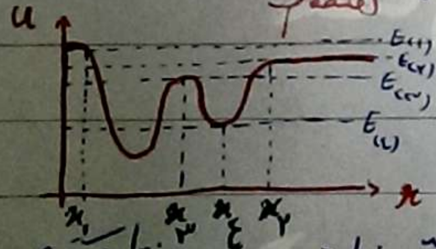
نکته: کار خالص در فرآیند انجام شده توسط یک نیروی پایستار روی ذره‌ای که در مسیر بسته حرکت می‌کند صفر است. به عبارت دیگر کار انجام شده توسط یک نیروی پایستار به مسیر بستگی نداشته و فقط به نقطه ابتدا و انتها وابسته است.

تعریف انرژی پتانسیل: انرژی پتانسیل انرژی است که انرژی جنبشی حین انجام کار نیروی پایستار به آن تبدیل می‌شود.

طبق قضیه کار و انرژی: $W = -\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F\,dx$ $\xrightarrow{\text{تعریف سوم نیروی پایستار}}$ $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$ $\xrightarrow{\text{۳ بعدی}}$ $F = -\nabla U$

انرژی مکانیکی: $E = K + U$ $\xrightarrow{\text{سیستم منزوی}}$ $\begin{cases} W = \Delta K = K_f - K_i \\ W = -\Delta U = U_i - U_f \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta K = -\Delta U \Rightarrow U_f + K_f = U_i + K_i$ *

کار نیروی خارجی: $W = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th} + \Delta E_{int}$ (شکل کلی پایستگی انرژی) $W_{fk} = -f_k d = \Delta E$ $\xleftarrow[\text{اصطکاک}]{\text{حالت خاص}}$ * $W = \Delta E = \Delta K + \Delta U$



شیب منحنی انرژی پتانسیل، اندازه نیروی پایستار را می‌دهد: $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$

۲) نقاط بازگشت حرکت: اگر E در مکان (۱) قرار داشته باشد نقطه x_1 نقطه بازگشت حرکت خواهد بود پس نقطه بازگشت محل تقاطع خط انرژی مکانیکی با منحنی انرژی پتانسیل است.

$U > E \rightarrow U > U + K \rightarrow 0 > K \rightarrow 0 > \frac{1}{2} m v^2$ ✗

/ /

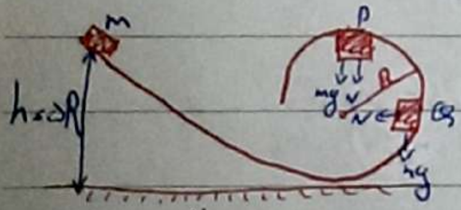
۳) نقاط تعادل منحنی: نقطه تعادل منحنی جایی است که شیب منحنی برابر صفر است و دارای سه حالت می‌باشد:

A) تعادل بی‌تفاوت: اگر انرژی مکانیکی $E_{(2)}$ باشد از نقطه ۲ به بعد تعادل بی‌تفاوت داریم.

B) تعادل ناپایدار: اگر انرژی مکانیکی $E_{(3)}$ باشد از نقطه ۳ به بعد تعادل ناپایدار داریم.

C) تعادل پایدار: اگر انرژی مکانیکی $E_{(4)}$ باشد از نقطه ۴ به بعد تعادل پایدار داریم.

مثال: در شکل زیر قطعه‌ای به جرم m از نقطه بالای سطح بدون اصطکاک رها می‌شود مطلوب است بزرگی های الف) مولفه‌ی افقی ب) مولفه‌ی عمودی نیرویی را که وارد بر قطعه در نقطه‌ی Q ج) قطعه را از حال سکون باید از چه ارتفاع h رها کرد تا در بالاترین نقطه حلقه در آستانه قطع تماس با مسیر قرار گیرد. د) بزرگی نیروی عمودی وارد بر قطعه در بالای حلقه را برحسب ارتفاع اولیه h بدست آورید.



الف) $N = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow E_f = E_i \rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i \Rightarrow mg5R = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgR \rightarrow mg4R = \frac{1}{2}mv_f^2$

$\Rightarrow \frac{mv^2}{R} = 8mg$ / ب) mg / ج) قانون دوم برای P: $\Sigma F = ma \rightarrow N + mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow mv^2 = mgR$ (نیرو قطع تماس)

$E_i = E_f \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R \rightarrow h = \frac{1}{mg}(\frac{1}{2}mgR + 2mgR) \Rightarrow h = \frac{5}{2}R$

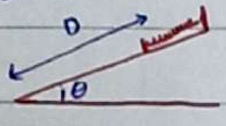
د) $E_i = E_f \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R \rightarrow N + mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow mv^2 = RN + Rmg$

$\Rightarrow h = \frac{1}{mg}(\frac{1}{2}NR + \frac{1}{2}Rmg + 2mgR)$

Scanned by CamScanner

مثال: شکل زیر را در نظر بگیرید اگر فنر با جسمی به جرم m به اندازه x فشرده شود و سپس از حال سکون رها گردد مطلوب است:

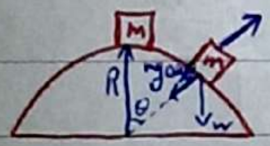
الف) تندی جسم وقتی دوباره فنر به طول آزاد می‌رسد (لحظه قطع تماس فنر با قطعه) ب) تندی جسم در لحظه رسیدن به نقطه پایین سطح شیب‌دار؟



الف) $E_i = E_f \rightarrow 0 + \frac{1}{2}kx^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_2 \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 + mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow v^2 = 2g\Delta h + \frac{k}{m}x^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gx\sin\theta + \frac{k}{m}x^2}$ / ب) $E_i = E_f \rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 + 2(x+D)g\sin\theta}$

مثال: جسمی به جرم m بالای نیم‌کره‌ای به شعاع R قرار دارد و با تندی اولیه ناچیز شروع به لغزیدن می‌کند (سطح بدون اصطکاک)



$\Sigma F = ma$

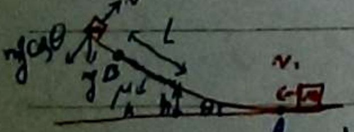
بدست آورید جسم در چه ارتفاعی از سطح جدا می‌شود؟

$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow mv^2 = mgR\cos\theta$ ① / $E_i = E_f \rightarrow mgR + 0 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$ ($h = R\cos\theta$)

(شرط قطع تماس: $N = 0$)

$\overset{①}{\Rightarrow} mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}mgR\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \rightarrow h = R\cos\theta \Rightarrow h = \frac{2}{3}R$

مثال: قطعه‌ای مطابق شکل بر مسیر بدون اصطکاک رو به بالا می‌لغزد تا اینکه به جسمی به طول L از ارتفاع h می‌رسد که روی شیبی به زاویه θ قرار دارد و دارای ضریب اصطکاک جنبشی μ_k است. اگر سرعت اولیه به ذره در نقطه A ... باشد و قطعه بتواند به نقطه B در پایین سطح با اصطکاک برسد تندی قطعه در آن نقطه چقدر است؟ اگر نتواند به نقطه B برسد بیشترین ارتفاعی که روی سطح شیب‌دار با اصطکاک بالا می‌رود چقدر است؟



برای مسیر بدون اصطکاک:

$E_i = E_f$ (نقطه A ، نقطه h) $\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \rightarrow h = 12.4\,m$

/ /

برای مسیر با اصطکاک: $W=\Delta E \to -f_k \cdot d = E_f - E_i \Rightarrow -f_k \cdot d = K_f + U_f - (U_i + K_i) \to K_f + mgl\sin\theta - 12{,}4m$

$= \mu_k mg\cos\theta\, l = K_f + mgl\sin\theta - 12{,}4m \Rightarrow K_f = 6{,}4m \Rightarrow K_f = \frac{1}{2}mv^2 \to \frac{1}{2}mv^2 = 6{,}4m$

$\Rightarrow v^2 = 12{,}8 \Rightarrow v = \sqrt{12{,}8}\ m/s$

مرکز جرم جسم: مرکز جرم یک سامانه نقطه‌ای است که وقتی سامانه حرکت می‌کند می‌توان فرض کرد که: ۱) تمام جرم سامانه در آن نقطه متمرکز است. ۲) تمام نیروی خارجی بر آن نقطه اثر می‌کند. $\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$

مرکز جرم ذرات:
$$\begin{cases} x_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \\ y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \\ z_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \end{cases}$$

مرکز جرم جسم صلب:
$$\begin{cases} x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm \\ y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm \\ z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm \end{cases} \xrightarrow[dm = \rho dv]{\rho = \frac{M}{V} \to M = \rho V} \begin{cases} x_{cm} = \frac{1}{V}\int x\,dv \\ y_{cm} = \frac{1}{V}\int y\,dv \\ z_{cm} = \frac{1}{V}\int z\,dv \end{cases}$$

نکته: مرکز جرم جسم ممکن است جایی خارج از جسم باشد.

نکته: اگر جسم نسبت به یک نقطه، خط یا صفحه تقارن داشته باشد مرکز جرم جسم دقیقا روی آن نقطه، خط یا صفحه قرار می‌گیرد و مولفه‌های دیگر آن محاسبه نمی‌شوند.

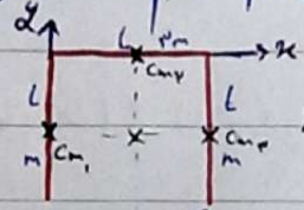
نکته: در ابتدای حل مسئله حتما باید یک دستگاه مختصات با مبدأ مشخص در نظر بگیریم.

قانون دوم نیوتون برای مرکز جرم: حرکت مرکز جرم جسم طبق قانون دوم نیوتون عمل می‌کند که در آن F برآیند نیروهای خارجی و a شتاب مرکز جرم است.

$$F_T = M a_{cm}$$

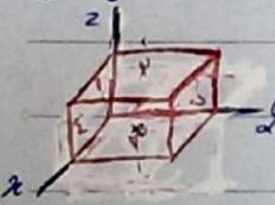
/ /

مثال: مطلوب است محاسبه مرکز جرم جسم زیر اگر هر یک از میله ها به طول L و جرم میله های قائم m و جرم میله های افقی $3m$ باشد؟



$$x_{cm} = \frac{L}{2} \; / \; y_{cm} = \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{m(-\frac{L}{2})+3m(0)+m(-\frac{L}{2})}{5m} = -\frac{L}{5}$$

مثال: مطلوب است مولفه های x و y و z مرکز جرم برای یک مکعب هم‌بال به طول یال L در حالی که سطح روی آن باز است؟

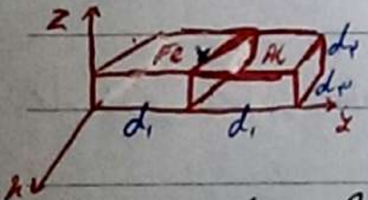


$$\begin{cases} x_{cm} = \frac{L}{2} \\ y_{cm} = \frac{L}{2} \end{cases}$$

$P_1: (\frac{L}{2}, 0, \frac{L}{2})$ ، $P_2: (\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0)$ ، $P_3: (0, \frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ ، $P_4: (L, \frac{L}{2}, \frac{L}{2})$ ، $P_5: (\frac{L}{2}, L, \frac{L}{2})$

$$\Rightarrow z_{cm} = \frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3+m_4z_4+m_5z_5}{m_1+m_2+m_3+m_4+m_5} = \frac{m(\frac{L}{2})+m(\frac{L}{2})+m(0)+m(\frac{L}{2})+m(\frac{L}{2})}{5m} = \frac{2mL}{5m} = \frac{2}{5}L$$

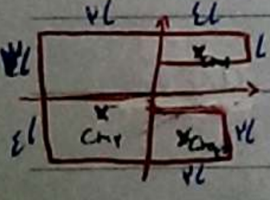
مثال: در شکل زیر جسم زیر نیمی از جنس آلومینیم با چگالی ρ_{Al} و نصف دیگر آن از آهن با چگالی ρ_{Fe} است. اگر d_1 و d_2 و d_3 مشخص باشد مولفه های مرکز جرم را بیابید.



$$\begin{cases} z_{cm} = \frac{d_2}{2} \\ x_{cm} = \frac{-d_3}{2} \end{cases}$$

$$y_{cm} = \frac{m_{Fe}y_{Fe} + m_{Al}y_{Al}}{m_{Fe}+m_{Al}} \xrightarrow[m=\rho V]{\rho = \frac{m}{V}} \frac{(\rho_{Fe}\frac{d_1}{2} + \rho_{Al}\frac{3d_1}{2})V}{(\rho_{Fe}+\rho_{Al})V} = \frac{(\rho_{Fe}+3\rho_{Al})d_1}{2(\rho_{Fe}+\rho_{Al})}$$

مثال: مختصات مرکز جرم ورقه ی یکنواخت زیر اگر طول L مشخص باشد به دست آورید.

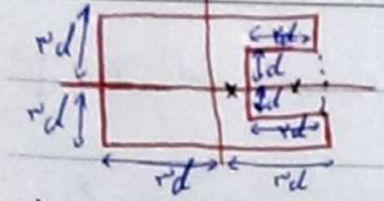


$$x_{cm} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3} \xrightarrow{m=\sigma A} \frac{\sigma[(4L^2 \times 2L)+(12L^2 \times -L)+(4L^2 \times L)]}{\sigma(4L^2+12L^2+4L^2)} = \frac{-2L^3}{22L^2} = \frac{-L}{11}$$

$$y_{cm} = \frac{4L^2(2.5L)+12L^2(-0.5L)+4L^2(-3L)}{22L^2} = \frac{-9L^3}{22L^2} = \frac{-9L}{22}$$

Scanned by CamScanner

مثال: مطلوب است مرکز جرم ورق یکنواخت با فرض معلوم بودن d



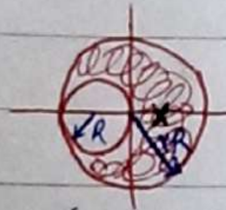
$m x_{cm}$ مربع ناقص $= m x_{cm}$ مربع کامل $- m x_{cm}$ مربع کوچک

$M = \sigma A \to \sigma \underbrace{(36d^2 - 4d^2)}_{32d^2} x_{cm} = \sigma(36d^2)(0) - \sigma(4d^2 \times 2d)$

$x_{cm} = \frac{-8d^3}{32d^2} = -\frac{1}{4}d$

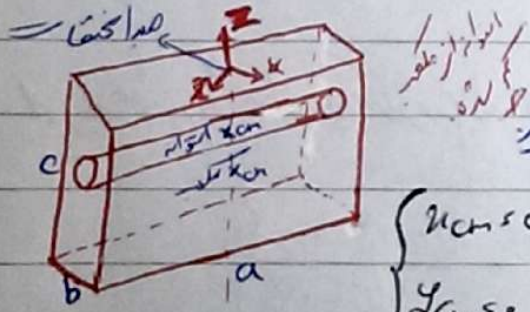
مثال: مطلوب است مرکز جرم ورقه‌ی یکنواخت، که حفره‌ای به شکل ۲ در داخل آن ایجاد شده است.

صفحه مختصات.



$x_{cm} = 0$ / دایره ناقص $m x_{cm} = m x_{cm}$ (دایره بزرگ) $- m x_{cm}$ (دایره کوچک)

$\sigma(\pi 4R^2 - \pi R^2) x_{cm} = -\sigma(\pi R^2)(-R) \to \sigma(3\pi R^2) x_{cm} = \sigma(\pi R^3) \Rightarrow x_{cm} = \frac{\pi R^3}{3\pi R^2} = \frac{R}{3}$



مثال: با توجه به شکل زیر مطلوب است محاسبه مرکز جرم جسم زیر.

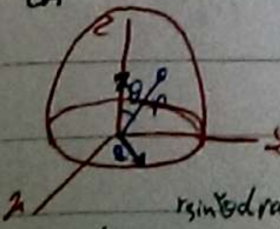
$x_{cm} = 0$

$y_{cm} = 0$

مکعب ناقص $m z_{cm} = m z_{cm}$ (مکعب کامل) $- m z_{cm}$ (استوانه)

$\rho z_{cm}(abc - \pi r^2 a) = \rho(abc)(-\frac{c}{2}) - \rho(\pi r^2 a)(-2r)$

$z_{cm}(abc - a\pi r^2) = -\frac{abc^2}{2} + 2\pi r^3 a \Rightarrow z_{cm} = \frac{2\pi r^3 a - \frac{abc^2}{2}}{abc - \pi r^2 a}$



مثال: مطلوب است محاسبه مرکز جرم نیم‌کره به شعاع R نسبت به مرکز آن.

$x_{cm} = 0$

$y_{cm} = 0$

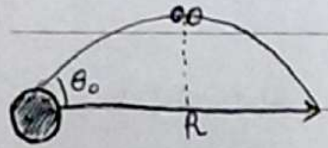
$z_{cm} = \frac{1}{V}\int z\,dV = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3}\int z\, r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr = \frac{3}{2\pi R^3}\underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{\frac{R^4}{4}} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\, d\theta}_{\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$

($z = r\cos\theta$، $dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$)

$\Rightarrow \frac{3R^4\pi}{2\pi 4 \times 2} = \frac{3R}{8}$

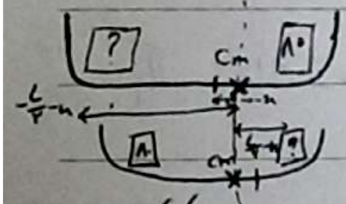
/ /

مثال: گلوله‌ای با سرعت اولیه v_0 با زاویه θ_0 نسبت به افق شلیک می‌شود در بالای مسیر گلوله منفجر شده و به دو تکه مساوی تقسیم می‌شود. یک تکه که تندی آن پس از انفجار صفر است به طور قائم سقوط می‌کند. تعیین کنید تکه دیگر در چه فاصله‌ای فرود می‌آید؟



$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad / \quad x_{cm} = \frac{m(\frac{R}{2}) + m x}{m+m} \rightarrow mx = 2mR - \frac{m}{2}R = \frac{3}{2}R$$

مثال: شخصی به جرم 80kg با یک شخص سبک‌تر در یک قایق ساکن در آب به جرم 30kg قرار دارند. اگر آن‌ها جای خود را با هم عوض کنند (فاصله آن‌ها 3 متر از هم است) متوجه می‌شوند که قایق به اندازه 40cm به طور افقی جابجا شده است. مطلوب است محاسبه جرم شخص سبک‌تر؟



$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

(سنگین: m_1، سبک: m_2، قایق: m_3)

$$m_1\left(\frac{L}{2} - x\right) + m_2\left(-\frac{L}{2} - x\right) + m_3(-x) = 0 \quad \xrightarrow{\text{جابجایی قایق}} 40cm = 2x \rightarrow x = 20cm$$

$$\Rightarrow 80\left(\frac{3}{2} - 0{,}2\right) + m_2\left(-\frac{3}{2} - 0{,}2\right) + 30(0{,}2) = 0 \Rightarrow m_2 = \ldots$$

مثال: سگی به جرم 4,5kg روی یک قایق 18kg ایستاده و در فاصله D = 6,1m از ساحل قرار دارد. سگ 2,4m روی قایق به سمت جلو می‌رود. فرض کنید سطح تماس قایق و آب بدون اصطکاک است. سگ در این لحظه چه فاصله‌ای از ساحل دارد؟

اندازه حرکت خطی (تکانه): $\vec{P} = m\vec{V}$

قانون دوم نیوتون برای تکانه: $F_T = \frac{dP}{dT} = \frac{d(mV)}{dT} \xrightarrow{\text{اگر } m \text{ ثابت باشد}} m\frac{d\vec{V}}{dt} = ma$

(برآیند نیروهای خارجی)

پایستگی انرژی حرکت: اگر نیروی خارجی نداشته باشیم: $F_T = \frac{dP}{dT} = 0 \to P = cte \to P_i = P_f$

تکانه برای سیستم ذرات: $P_T = MV_{cm}$

رجوع به ضربه: $F_T = \frac{dP}{dt} \to dP = FdT \xrightarrow{\int} \int_{P_i}^{P_f} dP = \int_{t_i}^{t_f} Fdt \Rightarrow J = \Delta P = \int_{t_i}^{t_f} Fdt$

مثال: جسم ساکنی در مبدأ مختصات xy منفجر شده و به سه قسمت تقسیم می‌شود مطلوب است بزرگی و جهت حرکت قطعه سوم

اگر قطعه اول با جرم m و سرعت $30\hat{i}$ و قطعه دوم به جرم m و سرعت $-30\hat{j}$ حرکت کند و جرم قطعه سوم برابر 3m باشد.

انفجار نیروی داخلی است $\Rightarrow F_T = 0 \Rightarrow$ پایستگی تکانه داریم $\Rightarrow P_i = P_f$ (قبل از انفجار / بعد از انفجار) $\Rightarrow 0 = mV_1 + mV_2 + 3mV_3 \Rightarrow 0 = 30\hat{i} - 30\hat{j} + 3V_3 \Rightarrow V_3 = -10\hat{i} + 10\hat{j}$

مثال: دو ذره A و B که جرم A دو برابر B است توسط یک فنر فشرده و با انرژی 60 J به صورت چسبیده به هم نگه داشته شده‌اند.

اگر پس از رها شدن کل انرژی به ذرات منتقل شود تا از هم دور شوند پس از کامل انتقال انرژی جنبشی ذره A و B را بیابید.

نیروی خارجی نداریم $\Rightarrow$ پایستگی تکانه $\Rightarrow P_i = P_f \Rightarrow 0 = M_AV_A + m_BV_B \xrightarrow{M_A = 2m_B} 2m_BV_A = -m_BV_B$

$\Rightarrow V_A = -\frac{1}{2}V_B$ / $60 = K_A + K_B = K_A + \frac{1}{2}m_BV_B^2 \Rightarrow K_A + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_A)(4V_A^2) \to K_A = \frac{60}{3} = 20J$

$K_B = 2K_A \Rightarrow K_B = 2\times 20 = 40J$

/ /

مثال: مردی به جرم 80kg روی نردبانی که از بالنی به جرم 320kg آویزان است قرار دارد. بالن در ابتدا نسبت به زمین ساکن است. اگر مرد روی نردبان با سرعت ٢/٥ نسبت به نردبان شروع به بالا رفتن کند: الف) بالن با چه تندی در چه جهتی حرکت می‌کند؟ ب) اگر مرد بالا رفتن را متوقف کند تندی بالن چقدر خواهد بود؟

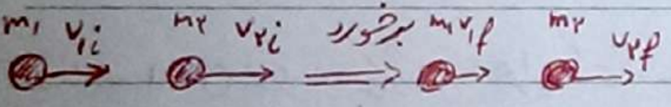
$p_i = p_f$ یا پایستگی اندازه حرکت ← نیروی خارجی نداریم / سرعت مرد نسبت به زمین = سرعت مرد نسبت به بالن + سرعت بالن نسبت به زمین

$0 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \Rightarrow 0 = 80(v_{2f} + u) + 320 v_{2f} \rightarrow v_{2f} = \ldots$

(مرد: $m_1 v_{1f}$ ، بالون: $m_2 v_{2f}$ ، سرعت بالون نسبت به زمین: v_{2f} ، سرعت مرد نسبت به بالون: u)

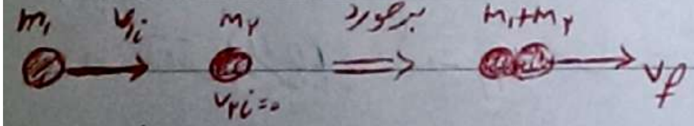
برخورد: در برخورد ۲ پارامتر قابل توجه می‌باشد: ۱) تکانه ۲) انرژی جنبشی کل سیستم.

برخورد ناکشسان: پایستگی اندازه حرکت برقرار است.



★ پایستگی اندازه حرکت: $p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} \Rightarrow p_T = p_{1i} + p_{2i} \Rightarrow (m_1+m_2)v_{cm} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \Rightarrow v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$

برخورد ناکشسان کامل: پایستگی اندازه حرکت برقرار است.



★ پایستگی اندازه حرکت: $p_i = p_f \rightarrow p_{1i} + p_{2i}^{\,0} = p_{1f} + p_{2f} \Rightarrow m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$

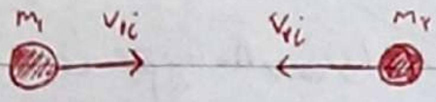
برخورد کشسان: در برخورد کشسان: ۱) پایستگی اندازه حرکت برقرار است. ۲) پایستگی انرژی جنبشی برقرار است.

در برخورد کشسان دو حالت را بررسی می‌کنیم: ۱) هدف متحرک ۲) هدف ساکن

Scanned by CamScanner

/ /

برخورد کشسان (هدف متحرک):



پایستگی اندازه حرکت: $P_i = P_f \rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$ (1)

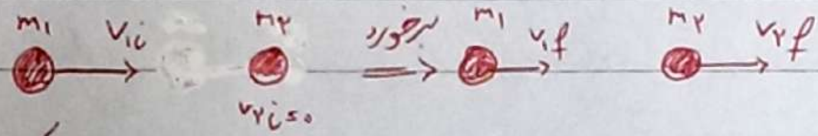
پایستگی انرژی جنبشی: $K_i = K_f \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$ (2)

دستگاه دو معادله دو مجهول (1) (2):

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$ *

برخورد کشسان (هدف ساکن):



پایستگی اندازه حرکت: $P_i = P_f \rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$ (1)

پایستگی انرژی جنبشی: $K_i = K_f \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$ (2)

دستگاه دو معادله دو مجهول (1) (2):

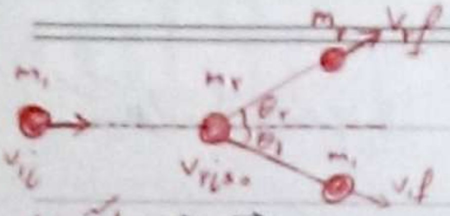
$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$ *

نکات برخورد: ۱) همان طور که دیده می‌شود v_{2f} همواره مثبت است اما v_{1f} می‌تواند مثبت یا منفی باشد. ۲) اگر جرم اول بزرگ‌تر باشد جرم اول به جلو حرکت می‌کند و اگر جرم اول کوچک‌تر باشد بعد از برخورد جرم اول پس زده می‌شود و به عقب برمی‌گردد.

۳) اگر m_1 تقریباً برابر با m_2 باشد v_{1f} تقریباً صفر است یعنی جرم m_1 متوقف شده و جرم m_2 با سرعت اولی شروع به حرکت می‌کند. ۴) اگر m_2 خیلی خیلی بزرگ‌تر از m_1 باشد (هدف سنگین) در این صورت جرم دوم تقریباً ساکن می‌ماند و جرم اول تقریباً با همان سرعتی که برخورد کرده به عقب پس زده می‌شود. ۵) اگر m_1 خیلی بزرگ‌تر از m_2 باشد (پرتابه سنگین) در این صورت جرم اول تقریباً بدون تغییر در سرعتش حرکت می‌کند و جرم دوم با دو برابر سرعت جرم اول به جلو رانده می‌شود.

Scanned by CamScanner



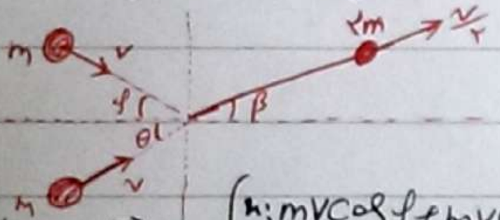
برخورد دو بعدی: پایستگی اندازه حرکت و پایستگی انرژی جنبشی برقرار است

پایستگی اندازه حرکت: $\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow \vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \Rightarrow m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x: m_1 v_{1i} + 0 = m_2 v_{2f} \cos\theta_2 + m_1 v_{1f} \cos\theta_1 \\ y: 0 = m_2 v_{2f} \sin\theta_2 - m_1 v_{1f} \sin\theta_1 \end{cases}$$

پایستگی انرژی جنبشی: $k_i = k_f \rightarrow k_{1i} + k_{2i} = k_{1f} + k_{2f} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$

مثال ۲: جسم با جرم ها و تندی های اولیه ی یکسان پس از برخورد کامل ناکشسان با نصف تندی اولیه ی خود حرکت می کند



زاویه ی بین سرعت های اولیه ی دو جسم را بیابید.

پایستگی اندازه حرکت: $\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow \begin{cases} x: mv\cos\varphi + mv\cos\theta = 2m\frac{v}{2}\cos\beta \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \\ y: -mv\sin\varphi + mv\sin\theta = 2m\frac{v}{2}\sin\beta \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \end{cases} +$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1} + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} + \underbrace{2\cos\varphi\cos\theta - 2\sin\varphi\sin\theta}_{2\cos(\varphi+\theta)} = \underbrace{\cos^2\beta + \sin^2\beta}_{1}$$

$$\Rightarrow 2 + 2\cos(\varphi+\theta) = 1 \longrightarrow \cos(\varphi+\theta) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta + \varphi = 120^\circ$$

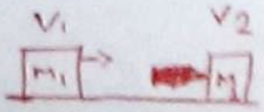
مثال: مطابق شکل قطعه ای به جرم $2kg$ با تندی $10 \frac{m}{s}$ به سمت راست و قطعه دیگری به جرم $5kg$ با تندی $3 \frac{m}{s}$ به سمت راست

حرکت می کند. اگر ثابت فنر $1120 \frac{N}{m}$ باشد وقتی قطعه ها برخورد می کنند در صورتی که ماکزیمم فشردگی فنر مربوط به حرکت قطعه ها با سرعت برابر باشد

ماکزیمم فشردگی فنر را بیابید

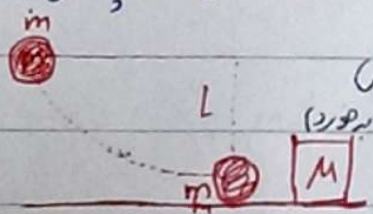
پایستگی اندازه حرکت: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f \rightarrow v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2\times 10 + 5\times 3}{2+5} = 5 \frac{m}{s}$

پایستگی انرژی برقرار است: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + 0 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 \Rightarrow x^2 = \ldots$



/ /

مثال: یک گلوله فولادی به جرم $0/5kg$ به انتهای نخی به طول $70cm$ بسته شده است. اگر مطابق شکل گلوله از وضعیت افقی رها شود در پایین‌ترین نقطهٔ مسیرش به جسم ساکنی به جرم $M=2/5kg$ برخورد کند که روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد در صورت کشسان بودن برخورد مطلوب است الف) تندی گلوله ب) تندی جعبه پس از برخورد؟



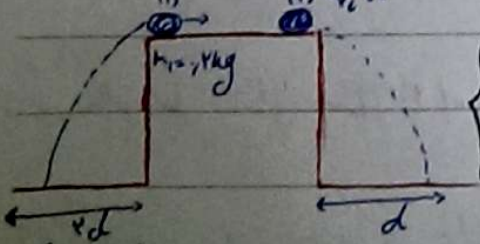
پایستگی انرژی کل (از لحظهٔ رها شدن تا برخورد)

$① \quad mgL + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gL} = \sqrt{14} \Rightarrow v = v_{1i}$

الف) $v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \Rightarrow v_{1f} = \frac{m - M}{m + M} v_{1i} \xrightarrow{①} v_{1f} = \ldots$

ب) $v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \Rightarrow v_{2f} = \frac{2m_1}{M + m} v_{1i} \xrightarrow{①} v_{2f} = \ldots$

مثال: مطابق شکل قرص (۱) به جرم $m_1 = 0/2kg$ روی سطح بدون اصطکاک میزی هل داده می‌شود تا با قرص ساکن (۲) برخورد کند. در اثر این برخورد کشسان، تکهٔ بعدی قرص (۲) سُر خورده و از میز پایین می‌افتد و در فاصله d از پای عمودی میز فرود می‌آید. قرص (۱) در اثر برخورد به عقب برگشته در جهت مخالف روی میز سُر می‌خورد و در فاصله $2d$ در آن سوی میز فرود می‌آید.



$$\begin{cases} \Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta\, t \\ \Delta x = v_0 \cos\theta\, t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \end{cases}$$

جرم قرص (۲) چقدر است؟

$$(۲)\begin{cases} x = vt \\ d = v_{2f}\, t = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}\, t \\ -2d = v_{1f}\, t = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}\, t \end{cases} \xrightarrow{\div} \frac{d}{-2d} = \frac{\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} t}{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} t} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{2m_1}{m_1 - m_2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{0/4}{0/2 - m_2}$$

$\Rightarrow m_2 = \ldots$

Scanned by CamScanner

/ /

معرفی پارامترهای دوران: deg/s / rev/s / rad/s ⇐ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$: ω لحظه‌ای ← سرعت زاویه‌ای ، $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$: $\bar{\omega}$ سرعت زاویه‌ای / $\Delta\theta$: جابجایی زاویه‌ای

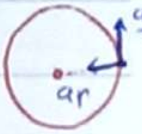
$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$: $\bar{\alpha}$ شتاب زاویه‌ای ← شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$ rad/s² / rev/s² / deg/s²

حرکت با شتاب زاویه‌ای ثابت:

زاویه‌ای	خطی
$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$	$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$
$\omega = \alpha t + \omega_0$	$v = at + v_0$
$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$	$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$
$\Delta\theta = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$	$\Delta x = \frac{1}{2}(v + v_0)t$
$\Delta\theta = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega t$	$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$

ارتباط بین پارامترهای خطی و زاویه‌ای: $1rev = 2\pi rad = 360 deg$ جابجایی: $s = r\theta$

سرعت: $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$ / شتاب: { شتاب مماسی: $a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$ ؛ شتاب مرکزگرا: $a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$ }



مثال: چرخی مطابق شکل دارای ۸ پره به هم فاصله به شعاع ۳۰cm می‌باشد. این چرخ روی محور ثابتی با تندی $2.5\ rev/s$ می‌چرخد. می‌خواهیم نیزه‌ای را طوری پرتاب کنیم که بدون برخورد با پره‌ها از چرخ بگذرد. الف) مینیمم تندی نیزه چقدر باید باشد؟

ب) آیا مهم است چه نقطه‌ای بین محور و چرخ هدف‌گیری شود؟ (طول نیزه ۲۰cm است.)

الف) $\omega = 2.5 \times 2\pi = 5\pi\ rad/s$ / 1rev ↔ 2π rad ، 2.5 ↔ ? / فاصله زاویه‌ای پره‌ها: $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

$\Delta\theta = \omega t \Rightarrow t = \frac{\pi/4}{5\pi} = \frac{1}{20}\ s \Rightarrow \Delta x = vt \rightarrow v = \frac{0.2}{\frac{1}{20}} = 4\ m/s$ /   ب) مهم نیست

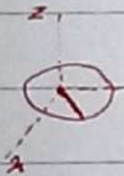
انرژی جنبشی دورانی: $K=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iv_i^2 \xrightarrow[\text{دوران}]{\text{برای جسم در حال}} K=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i(r_i^2\omega^2) \Rightarrow K=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2}_{I}\Big)\omega^2$ (همان اینرسی، گشتاور دورانی)

لختی دورانی (همان اینرسی): $I=\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \xrightarrow[\text{پیوسته}]{\text{برای جسم صلب}} I=\int r^2\,dm$

قضیه محورهای موازی: اگر جسم حول محوری موازی با محور عبوری از مرکز جرمش دوران کند همان اینرسی حول آن محور از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$I=I_{cm}+md^2$$

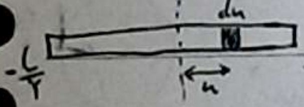
قضیه محورهای متعامد: برای یک جسم تخت منطبق بر صفحه xy رابطه زیر برقرار است:



$$I_z=I_x+I_y$$

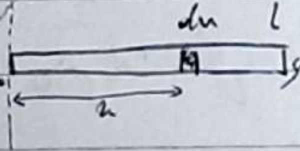
مثال: مطلوب است محاسبه همان اینرسی یک میله به طول L یک بار حول محور مرکزی و یک بار حول محور کناری؟

الف)



حول محور مرکزی: $I=\int r^2dm=\int r^2\rho\,dl \Rightarrow \rho\int x^2dx=\rho\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}=\frac{\rho L^3}{12} \Rightarrow \frac{m}{L}\cdot\frac{L^3}{12}=\frac{1}{12}mL^2$

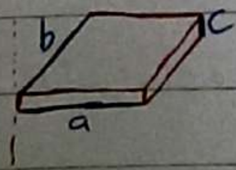
ب)



حول محور کناری: $I=\int r^2dm=\rho\int_0^L x^2dx=\frac{\rho L^3}{3}=\frac{1}{3}mL^2$

راه دوم (قضیه محورهای موازی): $I=I_{cm}+md^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{12}mL^2\right)+m\left(\frac{L^2}{2}\right)=\frac{1}{3}mL^2$

مثال: گشتاور لختی مکعب مستطیل زیر را حول یکی از گوشه‌های آن حساب کنید.



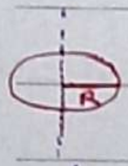
$I=\int r^2\underbrace{dm}_{\rho dv}=\int(x^2+y^2)\rho\,dv=\rho\int(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\rho\int x^2dx\,dy\,dz+\int y^2dx\,dy\,dz$

$=\rho\Big[\underbrace{\int_0^a x^2dx}_{\frac{a^3}{3}}\underbrace{\int_0^b dy}_{b}\underbrace{\int_0^c dz}_{c}+\underbrace{\int_0^b y^2dy}_{\frac{b^3}{3}}\underbrace{\int_0^a dx}_{a}\underbrace{\int_0^c dz}_{c}\Big]=\frac{\rho}{3}(abc)(a^2+b^2)=\frac{1}{3}m(a^2+b^2)\quad \left(\rho\to\frac{M}{abc}\right)$

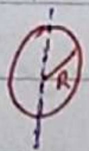
Scanned by CamScanner

ممان اینرسی های معروف:

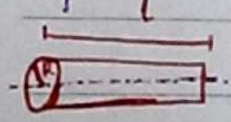
حلقه حول محور مرکزی: $I = MR^2$



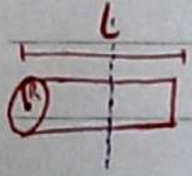
حلقه حول محور شعاعی: $I = \frac{1}{2} MR^2$



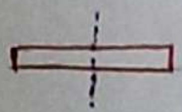
استوانه و دیسک توپر حول محور مرکزی: $I = \frac{1}{2} MR^2$



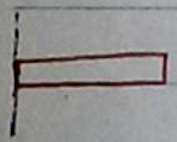
استوانه توپر و دیسک حول محور قطر مرکزی: $I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ml^2$



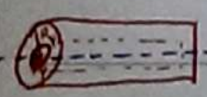
میله باریک حول محوری که از مرکز به طور عمودی گذشته: $I = \frac{1}{12} ml^2$



میله باریک حول محوری که از یک لبه به طور عمودی گذشته: $I = \frac{1}{3} ml^2$

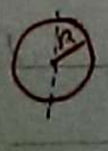


پوسته استوانه حول محور مرکزی: $I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$

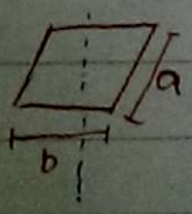


کره توپر حول محوری که در امتداد یکی از قطرهاست: $I = \frac{2}{5} mR^2$

پوسته کروی نازک حول محوری که در امتداد یکی از قطرهاست: $I = \frac{2}{3} mR^2$

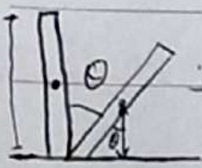


تیغه مسطح حول محور مرکزی: $I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$



/ /

مثال: یک میله نازک با طول l از پایه شکسته شده و به زمین سقوط می‌کند. در لحظه‌ای که میله با محور قائم زاویه θ دارد مطلوب است الف) تندی زاویه‌ای نوک میله ب) شتاب شعاعی نوک میله پ) شتاب مماسی نوک میله ت) در چه θای شتاب مماسی برابر g می‌شود.



الف) $E_1 = E_2 \to mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{l}{2}\cos 2\theta$

$\Rightarrow mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 + mg\frac{l}{2}\cos 2\theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{l}(1-\cos\theta) \to \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}\,(1-\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}$

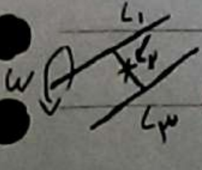
ب) $a_r = r\omega^2 \Rightarrow l \times \frac{3g}{l}(1-\cos\theta) \Rightarrow 3g(1-\cos\theta)$

پ) $a_t = r\alpha = l\frac{d\omega}{dt} = l\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} = l\omega\sqrt{\frac{3g}{l}} \times \frac{1}{2}\sin\theta\,(1-\cos 2\theta)^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow l\sqrt{\frac{3g}{l}} \times \sqrt{\frac{3g}{l}} \times \frac{1}{2}\sin\theta\,\frac{(1-\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}}{(1-\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2}g\sin\theta$

ت) $a_t = g \to \frac{3}{2}g\sin\theta = g \to \sin\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{2}{3}$

مثال: جسم صلبی متشکل از سه میله به طول l و جرم m با آرایش H مانند حول یکی از ساق‌ها می‌چرخد. جسم را از حالت سکون از حالت افقی رها می‌کنیم. مطلوب است سرعت زاویه‌ای وقتی جسم از موقعیت قائم عبور می‌کند.



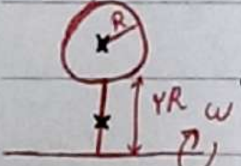
$x_{cm} = \frac{l}{2}$ / $I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$ ($\frac{1}{3}ml^2$, $I_{cm} + md^2 = ml^2$)

$\Rightarrow E_1 = E_2 \to 0 = -3mg\,x_{cm} + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow 3mg\frac{l}{2} = \left(\frac{2}{3}(ml^2)\omega^2\right) \to \omega = \sqrt{\frac{9}{4}gl}$

Scanned by CamScanner

/ /

مثال) مجموعه صلب شکل زیر شامل حلقه‌ای به جرم m و شعاع R و یک میله نازک به جرم m و طول L=2R از حالت سکون در وضعیت ایستاده رها می‌شود و با دوران حول محور افقی به طرف پایین می‌چرخد. مطلوب است سرعت زاویه‌ای این مجموعه حول محور چرخش وقتی از سمت گیری معکوس می‌گذرد.



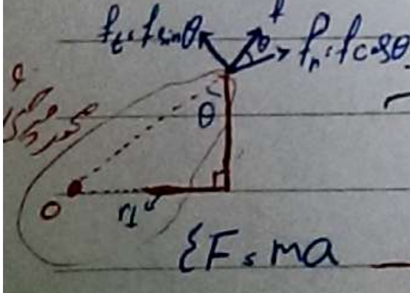
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i r_i = \frac{1}{2m}(m \cdot R + m3R) = 2R$$

$$I = I_{\text{حلقه}} + I_{\text{میله}} = \begin{cases} \text{میله}: I = \frac{1}{3}mL^2 \to \frac{4}{3}mR^2 \\ \text{حلقه}: I = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m(3R)^2 = \frac{19R^2 m}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{19mR^2}{2} + \frac{4}{3}mR^2 = \frac{65}{6}mR^2$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 \to 2mg\,y_{cm} = -2mg\,y_{cm} + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow 4mg(2R) = \frac{1}{2}\left(\frac{65}{6}\right)mR^2\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{96g}{65R}}$$

گشتاور نیرو: در حرکت دورانی توانایی F برای چرخاندن جسم به دو عامل: ۱) فاصله نقطه اثر نیرو تا محور دوران و ۲) بزرگی مولفه عمودی نیرو، بستگی دارد که مجموع این دو عامل را به صورت گشتاور نیرو تعریف می‌کنند.



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = rf\sin\theta$$

مولفه عمودی: $\begin{cases} \tau = r(f\sin\theta) = rf_t \\ \tau = (r\sin\theta)f = r_\perp f \end{cases}$

قانون دوم نیوتون برای چرخش:

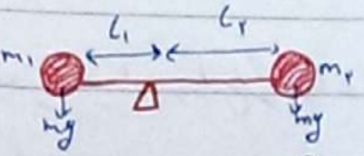
$$\sum F = ma \longrightarrow \sum \tau = I\alpha$$

قضیه کار و انرژی برای چرخش:

$$W = \int F\,dx \longrightarrow W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\,d\theta$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\,dx}{dt} = Fv \longrightarrow P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau\,d\theta}{dt} = \tau\omega$$

مثال: دو جسم به جرم های m به میله ای بدون جرم میلی به طول L_1+L_2 با متصل انتهای میله را روی تکیه گاه رها کنیم. بزرگی شتاب های اولیه را الف) برای ذره اول ب) برای ذره دوم بیابید.

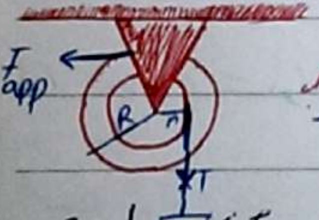


$$\Sigma \tau = I\alpha \rightarrow \begin{cases} \tau_1 = rF\sin\theta = (mgL_2 - mgL_1) = mg(L_2-L_1) \quad (1) \\ I = \Sigma m_i r_i^2 = m_1L_1^2 + m_2L_2^2 = m(L_1^2+L_2^2) \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)/(2)} \Sigma \tau = I\alpha$$

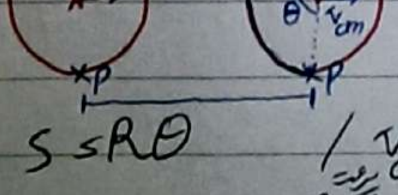
$$\rightarrow mg(L_2-L_1) = m(L_1^2+L_2^2)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{g(L_2-L_1)}{L_1^2+L_2^2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = L_1\alpha \rightarrow L_1 g \frac{L_2-L_1}{L_1^2+L_2^2} \\ a_2 = L_2\alpha \rightarrow L_2 g \frac{L_2-L_1}{L_1^2+L_2^2} \end{cases}$$

مثال: یک وسیله یویو مانند در یک سیستم بدون اصطکاک با شعاع خارجی R و شعاع توپی داخلی r در تقر بلند ید وقتی نیروی افقی F_{app} را به طناب پیچیده شده در لبه ی آن وارد کنیم. در این حالت جسم به جرم m که از طناب آویزان است با شتاب a به سمت بالا حرکت می کند. لختی دورانی کل یویو را حول محور چرخش آن بیابید.



برای جرم m: $\Sigma F = ma \rightarrow T - mg = ma \rightarrow T = m(g+a) \; (1) \;/\; a = r\alpha \rightarrow \alpha = \frac{a}{r} \; (2)$

$$\begin{cases} \tau = RF - rT \\ \Sigma\tau = I\alpha \end{cases} \xrightarrow{(1)/(2)} RF - rm(g+a) = I\frac{a}{r} \Rightarrow I = \frac{r}{a}\left[RF_{app} - rm(g+a)\right]$$



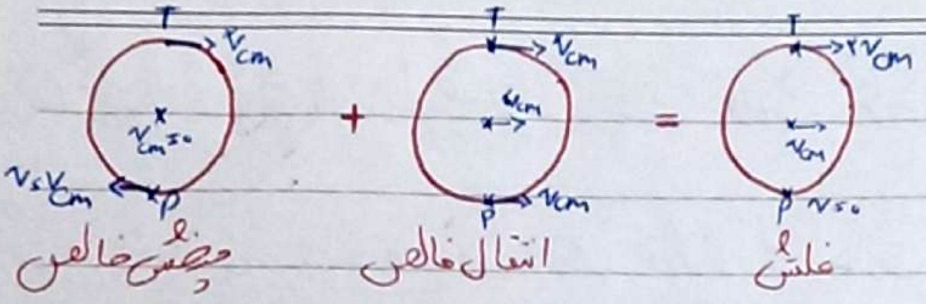
غلتش: ترکیبی از حرکت انتقالی و حرکت دورانی است.

$s = R\theta$ / $v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$ (سرعت مرکز جرم)

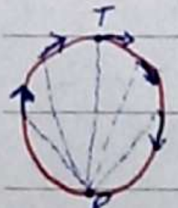
• برای بررسی حرکت غلتش دو دیدگاه وجود دارد: ۱) ترکیب دورانی و انتقال. ۲) محور چرخش کامل

Scanned by CamScanner

ترکیب دوران و انتقال:



چرخش کامل



سرعت در نقطه T: $v_T = 2(\underbrace{R\omega}_{v_{cm}}) = 2v_{cm}$

انرژی جنبشی حرکت غلتشی: $K_p = \frac{1}{2} I_p \omega^2 = \frac{1}{2}(I_{cm} + mR^2)\omega^2$:از دیدگاه دوم

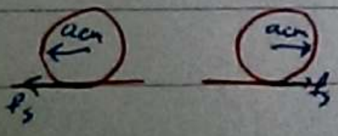
$\Rightarrow \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} m(\underbrace{R^2\omega^2}_{v_{cm}}) \Longrightarrow K = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2$

بررسی نیروهای وارد بر جسم در حال غلتش، حرکت غلتشی را به دو صورت سرعت ثابت و شتاب دار می توان بررسی کرد.

حرکت سرعت ثابت یک حرکت بدون اصطکاک است اما حرکت شتاب دار همراه با اصطکاک می باشد که به دو نوع می باشد: ۱- غلتش هموار که در جسم تمایل به لغزش ایجاد می شود ولی جسم نمی لغزد و لذا اصطکاک آن ایستایی است.

۲- غلتش ناهموار که جسم می لغزد و اصطکاک آن اصطکاک جنبشی است.

نکته: اگر شتاب لغزاننده باشد (لغزاننده) تمایل به لغزش روی سطح صاف به عقب ایجاد شده و اصطکاک خلاف جهت لغزش به سمت جلو است. (در سطوح صاف جهت اصطکاک و شتاب یکی است)

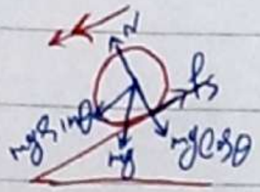


نکته: اصطکاک ایستایی همواره خلاف جهت تمایل به لغزش است نه غلتش.

Scanned by CamScanner

/ /

غلتش به پایین سطح شیب‌دار: در سطح شیب‌دار چه حرکت به سمت بالا باشد چه به سمت پایین تمایل به لغزش همواره به سمت پایین



بوده در نتیجه اصطکاک به سمت بالا می‌باشد. $\Sigma\tau = I_{cm}\alpha \;(\frac{a}{R}) \rightarrow \tau = rf\sin\theta$

$$\Sigma\tau = I_{cm}\alpha \rightarrow Rf_s = I_{cm}\left(\frac{-a_{cm}}{R}\right) \Rightarrow a_{cm} = \frac{R^2 f_s}{I_{cm}} \Rightarrow f_s = \frac{-I_{cm}a_{cm}}{R^2} \quad (1)$$

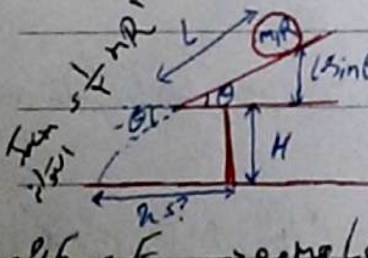
$$\Sigma F = ma_{cm} \rightarrow f_s - mg\sin\theta = ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{f_s - mg\sin\theta}{m} \quad (2)$$

$$\xrightarrow[(2)]{(1)} a_{cm} = \frac{\frac{I_{cm}a_{cm}}{R^2} + mg\sin\theta}{m} \Rightarrow a_{cm}\left(1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}\right) = -g\sin\theta \Rightarrow a_{cm} = \frac{-g\sin\theta}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}}$$

$$a_{cm} = \frac{-g}{1 + \frac{I_{cm}}{mR^2}}$$

نکته: در سقوط $\theta = 90^\circ$ می‌باشد و به‌جای f_s کشش نخ داریم در نتیجه.

مثال: استوانه صلبی به شعاع R و جرم m از حال سکون بدون لغزش از سقفی که شیب آن θ است به پایین می‌غلتد. مسافت L را می‌پیماید مطلوب است محاسبه الف) تندی زاویه‌ای استوانه حول مرکزش وقتی سقف را ترک می‌کند. ب) اگر ($v = R\omega$)



لبه‌ی سقف در ارتفاع H باشد استوانه در چه فاصله‌ی افقی از سقف فرود می‌آید؟

$$E_1 = E_2 \rightarrow 0 + mgL\sin\theta = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 0 \Rightarrow mgL\sin\theta = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega^2$$

(لبه‌ی سقف) (پتانسیل)

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2gL\sin\theta}{\frac{3}{2}R^2} = \frac{4gL\sin\theta}{3R^2}$$

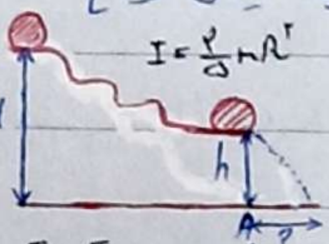
ب)

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \xrightarrow[v = R\omega]{\theta = \theta} \ldots$$

(y = H)

/ /

مثال: یک گلوله‌ی توپر از حال سکون شروع به غلتش از ارتفاع اولیه H می‌کند. در انتهای این مسیر افقی در ارتفاع h از مسیر جدا می‌شود. مطلوب است محاسبه فاصله افقی برخورد گلوله با زمین از نقطه A؟

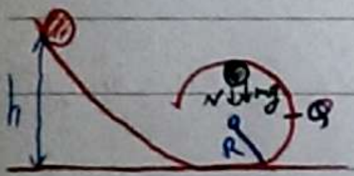


$E_1 = E_2 \rightarrow mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2 \times \frac{v^2}{R^2}$

$\Rightarrow 2g(H-h) = v^2(1+\frac{2}{5}) \Rightarrow v^2 = \frac{10}{7}g(H-h)$ ① $\xrightarrow{\text{حرکت پرتابی}} y = x\,tg\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$, $y=-h$, $\theta = 0$ ...

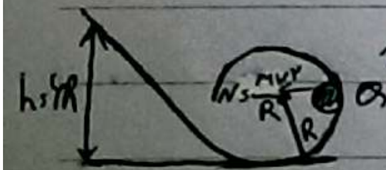
مثال: در شکل زیر یک گلوله توپر به جرم m از حال سکون در یک مسیر مستقیم رها می‌شود و در مسیر مقابل می‌غلتد. اگر شعاع مسیر R باشد و طوری که $r \ll R$ و r شعاع گلوله است: الف) h را باید در چه صورتی که گلوله در نقطه بالای مسیر از مسیر جدا شود.

ب) اگر گلوله از ارتفاع 4R رها شود مطلوب است محاسبه بزرگی و جهت مولفه افقی وارد بر گلوله در نقطه Q؟



الف) $\Sigma F = \frac{mv^2}{R} \rightarrow mg + N = \frac{mv^2}{R}$ (N = 0 شرط جدا شدن) $\rightarrow v^2 = Rg$ ② $\rightarrow E_1 = E_2$ (ابتدا، بالای مسیر)

$\rightarrow 0 + mgh = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \rightarrow mgh = mg2R + \frac{1}{2}mRg + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\frac{Rg}{r^2} \Rightarrow h = \frac{27}{10}R$



ب) $E_1 = E_2 \rightarrow mg(4R) = mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$\rightarrow mg(4R) = mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\frac{v^2}{r^2} \Rightarrow \frac{mv^2}{R} = \frac{30}{7}mg$

Scanned by CamScanner

/ /

قانون صفرم ترمودینامیک: این قانون به مفهوم دما اشاره دارد که به دو صورت بیان می‌گردد: ۱) اگر دو جسم A و B هر دو با جسم سوم C در تعادل گرمایی باشند آنگاه A و B با یکدیگر نیز در تعادل گرمایی اند. ۲) هر جسم خاصیتی به نام دما دارد که هر وقت دو جسم در تعادل گرمایی باشند می‌گوییم دمای آنها برابر است و ...

مقیاس های دما: ۱) سلسیوس: مقیاس کاربردی ۲) کلوین: مقیاس علمی ۳) فارنهایت: مقیاس مورد استفاده آمریکا

نکته: در مقیاس سلسیوس و کلوین اندازه درجات یکسان بوده ولی صفرها متفاوت است: $T_K = T_C + 273{,}15$

نکته: در مقیاس فارنهایت اندازه درجات و صفرها با مقیاس سلسیوس و کلوین متفاوت است.

انبساط گرمایی: ۱) خطی: تغییر طول میله در اثر گرم شدن وقتی دمای آن به اندازه ΔT تغییر کند: $\Delta L = L\alpha\Delta T$

۲) حجمی: تغییر حجم میله در اثر گرم شدن وقتی دمای آن به اندازه ΔT تغییر کند: $\Delta V = V\beta\Delta T \,/\, \beta = 3\alpha$

گرما: گرما انرژی مبادله شده بین سیستم و محیط در اثر اختلاف دما می‌باشد.

نکته: وقتی گرما از محیط به سیستم انتقال پیدا کند مثبت است و وقتی گرما از سیستم به محیط انتقال پیدا کند منفی است.

نکته: قبل از اینکه بفهمند گرما از جنس انتقال انرژی است تصور می‌شد گرما توانایی افزایش دمای یک گرم آب به اندازه ۱ درجه است و آن را برحسب کالری بیان می‌کردند: $1\,cal = 4{,}186\,J$

ظرفیت گرمایی: ثابت تناسب تغییرات گرما با ΔT. $Q = C\Delta T$

گرمای ویژه: ظرفیت گرمایی برای واحد جرم. $Q = mc\Delta T$

گرمای ویژه مولی: اگر مقدار ماده برحسب مول باشد استفاده می‌شود.

گرمای تغییر حالت: اگر گرما به جای تغییر دما صرف تغییر حالت شود.

$$Q = mL \begin{cases} L_V : \text{میعان - تبخیر} \\ L_f : \text{انجماد - ذوب} \end{cases}$$

کار و گرما: کار انجام شده توسط گاز حین انبساط و تراکم:

$$W = \int F.dl = \int PA\,dl = \int P\,dV \begin{cases} W>0 \rightarrow \text{حجم} \uparrow \\ W<0 \rightarrow \text{حجم} \downarrow \end{cases}$$

$\hookrightarrow P = \frac{F}{A} \rightarrow F = PA$

نکته: کار و گرما هر دو وابسته به مسیر اند.

قانون اول ترمودینامیک (پایستگی انرژی در ترمودینامیک): کار و گرما و هر ترکیبی از آنها وابسته به مسیر اند به جز $Q - W$

که تابع حالت بوده یعنی به نقطه ابتدا و انتهای مسیر وابسته است که آن انرژی درونی گویند.

$$\begin{cases} \Delta E_{int} = Q - W \\ dE_{int} = dQ - dW \end{cases}$$

نکته: اگر انرژی به صورت گرما به سیستم وارد شود ΔE_{int} افزایش پیدا می‌کند و اگر کار انجام شده توسط سیستم مثبت شود ΔE_{int} کاهش پیدا می‌کند.

قانون اول ترمودینامیک برای فرآیندهای ترمودینامیکی مهم:

فرآیند بی‌دررو: فرآیند خیلی سریع انجام شود یا سیستم عایق‌بندی شود که فرآیند بی‌دررو است به طوری که گرما مبادله نمی‌شود.

$$\Delta E_{int} = Q - W \xrightarrow{Q=0} \Delta E_{int} = -W$$

/ /

فرآیند هم حجم: $\Delta E_{int} = Q - W \xrightarrow{W=0} \Delta E_{int} = Q$

چرخه: $\Delta E_{int} = Q - W \xrightarrow{\Delta E_{int}=0} Q = W$

فرآیند انبساط آزاد: میتوان فرآیندی در نظر گرفت بدون مبادله کار و گرما می باشد که انقدر سریع می باشد که هیچ تسلطی بر مسیر فرآیند نداریم:

$$\Delta E_{int} = Q - W \xrightarrow[Q=0]{W=0} \Delta E_{int} = 0$$

مثال: قطر داخلی حلقه ی مسی به جرم $20\,g$ در دمای صفر درجه برابر D است. قطر کره آلومینیومی در دمای 100° برابر با $d = 2.54508\,cm$ است. کره را روی حلقه قرار می دهیم با چشم پوشی از اتلاف گرما به محیط این دو به تعادل گرمایی می رسند در دمای تعادل کره از حلقه عبور کرده و برهم مماس می شوند. مطلوب است جرم کره آلومینیومی؟

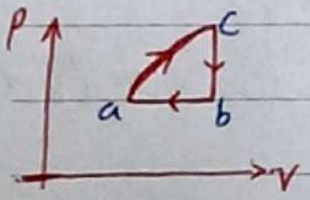
$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T \rightarrow L = L_0 (1 + \alpha \Delta T) \qquad (D = 2.54\ldots cm)$$

در تعادل $\Rightarrow D = d \Rightarrow D_0 (1 + \alpha_{Cu} (T_f - 0)) = d_0 (1 + \alpha_{Al} (T_f - 100)) \Rightarrow T_f = 50.38^\circ C$

$$\sum Q = 0 \rightarrow m_{Cu} C_{Cu} \underbrace{\Delta T_{Cu}}_{T_f - 0} + m_{Al} C_{Al} \underbrace{\Delta T_{Al}}_{T_f - 100} = 0 \Rightarrow m_{Al} = \ldots$$

Scanned by CamScanner

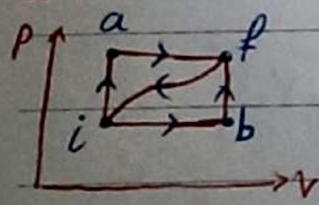
مثال: در چرخه زیر از C تا B، ۴۰ J گرما از گاز انتقال می یابد. از B تا A، ۱۳۰ J گرما از گاز منتقل می شود و بزرگی کار انجام شده توسط گاز ۸۰ J است. از A تا C، ۴۰۰ J گرما به گاز منتقل می شود. مطلوب است محاسبه کار انجام شده از A تا C توسط گاز؟



$$\begin{cases} Q_{cb} = -40\,J \\ Q_{ba} = -130\,J \\ Q_{ac} = 400\,J \end{cases} \qquad \begin{cases} W_{ba} = -80\,J \rightarrow \text{حجم کم شده پس} - \\ W_{cb} = 0 \rightarrow \text{هم حجم است} \\ W_{ac} = ? \end{cases}$$

$$\Delta E_{int} = 0 \rightarrow Q = W \rightarrow -40 - 130 + 400 = -80 + 0 + W_{ac} \Rightarrow W_{ac} = 310\,J$$

مثال: در چرخه زیر وقتی از حالت i به f از مسیر iaf برویم $Q = 50\,cal$ و $W = 20\,cal$ است. اگر مسیر ibf طی شود $Q = 36\,cal$ خواهد بود. الف) کار W در مسیر ibf چقدر است؟ ب) اگر در برگشت مسیر fi طی شود $W = -13\,cal$ است. مطلوب است محاسبه Q. پ) اگر $E_{int f} = 10\,cal$ باشد $E_{int i}$ چقدر است؟ ت) اگر $E_{int b} = 22\,cal$ باشد مقدار Q برای مسیر ib و مسیر bf چقدر است؟



الف) $\Delta E_{int,iaf} = Q_{iaf} - W_{iaf} = 50 - 20 = 30\,cal \;/\; \Delta E_{int,ibf} = 30\,cal \rightarrow 30 = Q_{ibf} - W_{ibf} \Rightarrow 30 = 36 - W \Rightarrow W_{ibf} = 6\,cal$

ب) $\Delta E_{int,fi} = -\Delta E_{int,if} = -30\,cal \rightarrow \Delta E_{int,fi} = Q_{fi} - W_{fi} \Rightarrow -30 = Q_{fi} + 13 \rightarrow Q_{fi} = -43\,cal$

پ) $\Delta E_{int,if} = E_{int f} - E_{int i} \rightarrow 30 = 10 - E_{int i} \Rightarrow E_{int i} = -20\,cal$

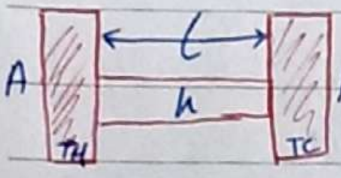
ت) $\Delta E_{int,ib} = E_{int b} - E_{int i} \rightarrow 22 - (-20) = 42\,cal \;/\; \Delta E_{int,ib} = Q_{ib} - W_{ib} \rightarrow 42 = Q_{ib} - 6 \rightarrow Q_{ib} = 48\,cal$

ت) $Q_{ibf} = Q_{ib} + Q_{bf} \Rightarrow 36 = 48 + Q_{bf} \Rightarrow Q_{bf} = -12\,cal$

Scanned by CamScanner

/ /

راه های انتقال گرما: ۱- رسانش   ۲- همرفت   ۳- تابش

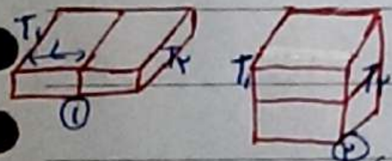


رسانش: $P=\frac{Q}{t}=kA\frac{T_H-T_C}{l}$ / چند لایه: $P=\frac{Q}{t}=\frac{A(T_H-T_C)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{l_i}{k_i}\right)}$

k: ثابتی است که فقط به جنس ماده بستگی دارد و هرچه قدر بزرگتر باشد ماده رسانش گرمایی بیشتری دارد.

مقاومت گرمایی: R هرچه قدر بزرگتر باشد ماده عایق گرمایی بهتری است. $R=\frac{l}{k}$

مثال: مطابق شکل دو میله مکعب مستطیل فلزی با دماهای $T_1=0°$ و دمای T_2 به هم جوش داده شده اند. فرض کنید در مدت ۲ دقیقه ۱۰ ژول گرما با آهنگ ثابت از سمت راست به سمت چپ عبور می کند. اگر میله ها به صورت شکل دو جوش داده شوند در چه مدت ۱۰ ژول گرما جابجا می شود؟



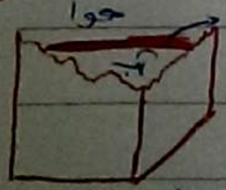
$P=\frac{Q}{t}=\frac{kA(T_H-T_C)}{l}$

① $\rightarrow \frac{10}{120}=\frac{kA100}{2l}$

② $\rightarrow \frac{10}{t_2}=\frac{k2A100}{l}$

$\xrightarrow{\div} \frac{\frac{10}{120}}{\frac{10}{t_2}}=\frac{50\frac{kA}{l}}{200\frac{kA}{l}} \Rightarrow t_2=30\,s$

مثال: ظرف آبی در هوای سرد بیرون قرار دارد و لایه ای از یخ به ضخامت $5\,cm$ روی سطح آن تشکیل شده است. دمای هوا در بالای یخ -10 است. اگر دیواره ها و کف ظرف هیچ انرژی به بیرون مبادله نکنند با فرض داشتن مقادیر L_f، چگالی یخ و k یخ



آهنگ تشکیل یخ بر حسب $\frac{cm}{h}$ در زیر لایه یخ را تعیین کنید؟ $P=\frac{dQ}{dt}=\frac{dm\,L_f}{dt}=L_f\frac{dm}{dt}$

$=L_f\rho\frac{dV}{dt}=L_f\rho\frac{A\,dx}{dt}$ ① / $P=kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$ ② $\xrightarrow{①=②} L_f\rho A\frac{dx}{dt}=kA\frac{\Delta T}{\Delta x} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{k\Delta T}{L_f\rho\Delta x}$

Scanned by CamScanner

تعریف مول: تعداد اتم های موجود در ۱۲ گرم کربن ۱۲ را یک مول گویند.

فرض آووگادرو: گفت همه ی گازها در شرایط یکسان دما و فشار تقریباً دارای حجم یکسان هستند و به تبع تعداد اتم یا مولکول یکسانی دارند.

عدد آووگادرو: عددی که آووگادرو به تعداد اتم های موجود در یک مول ماده گفت: $N_a = 6.02\times10^{23}\ mol^{-1}$

$n = \frac{N}{N_a} = \frac{m_s}{M} = \frac{m_s}{N_a m}$: n تعداد مول های موجود در ماده (m_s: جرم کل، M: جرم مولی)

تئوری جنبشی: این تئوری خواص ماکروسکوپیک گاز مثل دما، فشار و ... را ارتباط می دهد به پارامترهای میکروسکوپیک گاز مانند انرژی جنبشی ذرات، تندی ذرات، تعداد ذرات و ...

گاز کامل: همان طور که گفته شد نمونه های یک مولی از گاز با حجم یکسان در دمای برابر، فشار تقریباً برابر خواهند داشت. به طوری که هر چه گاز رقیق تر باشد اختلاف فشارها کمتر می شود. برای یک گاز به اندازه کافی رقیق (گاز کامل) داریم:

$\frac{R}{N_a} = k = 1.38\times10^{23}$ ثابت بولتزمن

$$PV = nRT \Longrightarrow PV = NkT$$

کار انجام شده توسط گاز کامل، فرآیند هم دما:

$$PV = nRT \Longrightarrow P = \frac{\overset{cte}{(nRT)}}{V} \quad (1)$$

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV \xrightarrow{(1)} W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{(nRT)}{V}\,dV \longrightarrow W = nRT\int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \Longrightarrow W = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$$

Scanned by CamScanner

/ /

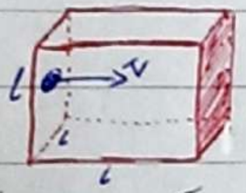
فرآیند هم فشار: $W=\int P\,dV = P\int_{V_i}^{V_f} dV = P\Delta V$

فرآیند هم حجم: $W=\int P\,dV = 0$

فشار و تندی rms: در این قسمت می خواهیم فشار یک مول گاز را که در یک جعبه مکعبی به طول L و حجم

m قرار دارد بر حسب تندی میانگین مولکول های آن بررسی کنیم. با فرض چشم پوشی از برخورد ذرات با هم

و فرض کشسان بودن برخورد ذرات با دیواره ها.



اندازه تغییر تکانه وارد بر دیواره ها $=mv_x-(-mv_x)=2mv_x$ ؛ مدت زمانی که طول می‌کشد تا ذره رفت و برگشت کند $\Delta t=\frac{2L}{v_x}$

اندازه تکانه

$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{2mv_x}{\frac{2L}{v_x}}=\frac{mv_x^2}{L}$ برای N ذره $\rightarrow \frac{m}{L}\sum_{i=1}^{N} v_{ix}^2=\frac{m}{L}N\overline{v_x^2}$ ① $\Rightarrow \boxed{\frac{mN\overline{v^2}}{3L}}$

سه بعد: $\overline{v^2}=\overline{v_x^2}+\overline{v_y^2}+\overline{v_z^2}$ ، $\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2} \Rightarrow \overline{v^2}=3\overline{v_x^2} \Rightarrow \overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$ ①

فشار: $P=\frac{F}{A}=\frac{mN\overline{v^2}}{3V_{\text{حجم}}}=\frac{m(nN_A)\overline{v^2}}{3V_{\text{حجم}}}=\frac{nM\overline{v^2}}{3V_{\text{حجم}}}$ ، $v_{rms}=\sqrt{\overline{v^2}}$

فشار: $P=\frac{nMv_{rms}^2}{3V_{\text{حجم}}} \rightarrow v_{rms}=\boxed{\sqrt{\frac{3PV_{\text{حجم}}}{nM}}}=\sqrt{\frac{3nRT}{nM}}=\boxed{\sqrt{\frac{3RT}{M}}}$

انرژی جنبشی انتقالی: $K=\frac{1}{2}mv^2$ برای یک ذره $K=\frac{1}{2}mv_{rms}^2=\frac{1}{2}m\frac{3RT}{M}=\frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T=\frac{3}{2}kT$

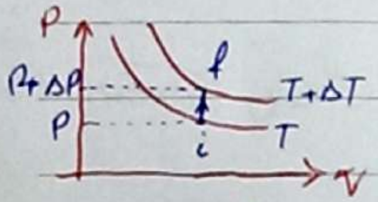
انرژی جنبشی برای یک ذره: $K=\frac{3}{2}kT$ انرژی جنبشی برای n ذره: $K=n\frac{3}{2}kT$

Scanned by CamScanner

/ /

محاسبه انرژی درونی: فرض می‌کنیم انرژی درونی گاز کامل برابر انرژی جنبشی انتقالی ذرات گاز باشد:

$$E_{int} = N\bar{K} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}n(\underbrace{N_A k}_{R})T = \frac{3}{2}nRT \Rightarrow E_{int} = \frac{3}{2}nRT$$

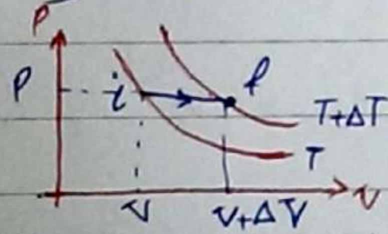


محاسبه گرمای ویژه مولی در حجم ثابت (C_V):

$$Q = nC_V\Delta T$$

$$\Delta E_{int} = Q - W = nC_V\Delta T \Rightarrow C_V = \frac{\Delta E_{int}}{n\Delta T} = \frac{\frac{3}{2}nR\Delta T}{n\Delta T} = \frac{3}{2}R \xrightarrow[\text{گاز تک اتمی}]{\text{فقط برای}} \Delta E_{int} = \overbrace{\frac{3}{2}}^{C_V}nRT = nC_V\Delta T$$

نکته: اگرچه در رابطه بالا C_V دیده می‌شود اما این یک رابطه کلی برای انرژی درونی است و همیشه برقرار است.



محاسبه گرمای ویژه مولی در فشار ثابت را

قانون اول: $\Delta E_{int} = Q - \underset{P\Delta V}{W} \rightarrow nC_V\Delta T = nC_P\Delta T - nR\Delta T \Rightarrow C_P = C_V + R$ برای گاز تک یا چند اتمی

درجات آزادی: $C_V = \frac{3}{2}R$ تنها برای گاز کامل تک اتمی مطابقت داشت چون یک مولکول چند اتمی

انرژی درونی خود را به جز حرکت انتقالی می‌تواند صرف حرکت دورانی و ارتعاشی کند.

اصل هم‌پاری: یک مولکول با f درجه آزادی f راه مستقل برای ذخیره انرژی دارد که انرژی متوسط هر

درجه آزادی برابر $\frac{1}{2}kT$ است.

$$C_V = \frac{f}{2}R$$

$$C_P = C_V + R = \frac{f}{2}R + R$$

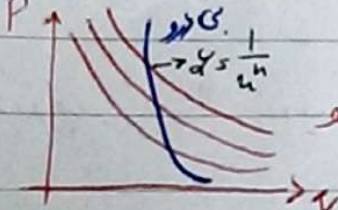
Scanned by CamScanner

★ نکته: ۳ درجه آزادی برای انتقال در هر صورت داریم.

★ نکته: برای گاز دو اتمی ۲ درجه آزادی برای چرخش و برای گاز سه اتمی ۳ درجه آزادی برای چرخش داریم.

★ نکته: درجه آزادی نوسانی یا ارتعاشی انرژی در دماهای بالا خود را نشان می دهد.

انبساط بی دررو گاز کامل: فرآیندی که سریع باشد و سیستم عایق بندی شده باشد و $Q=0$ باشد فرآیند بی دررو است



$\gamma_{\text{بی دررو}} = \frac{C_P}{C_V}$ / $PV^{\gamma} = cte \to P_i V_i^{\gamma} = P_f V_f^{\gamma}$ ★

$PV = nRT \to P = \frac{nRT}{V} \to PV^{\gamma} = \left(\frac{nRT}{V}\right) V^{\gamma} = cte \to TV^{\gamma-1} = cte \Rightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$

انبساط آزاد گاز کامل: انبساط آزاد حالت خاص فرآیند بی دررو است که در آن انتقال گرما و کار نداریم:

$PV = nRT \to P_i V_i = P_f V_f$ ($nRT = cte$)

$\Delta E_{int} = Q - W \to \Delta E_{int} = 0 \to \Delta T = 0 \to T_i = T_f$

اصل موضوع آنتروپی: برای یک فرآیند برگشت ناپذیر در یک سیستم بسته تغییرات آنتروپی همواره مثبت است ($\Delta S > 0$) یعنی آنتروپی افزایش می یابد. آنتروپی تابع حالت است و مستقل از مسیر می باشد.

تغییرات آنتروپی چنین یک فرآیند: $\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T}$

حالت خاص (هم دما): $\Delta S = \frac{1}{T}\int_i^f dQ$

Scanned by CamScanner

تغییر آنتروپی یک گاز کامل طی یک فرآیند برگشت پذیر. یک فرآیند برگشت پذیر آهسته و مرحله به مرحله انجام می‌شود

در نتیجه برای هر مرحله می‌توان این گونه نوشت: $dE_{int} = dQ - dW$: قانون اول ترمودینامیک

$$\rightarrow dQ = dE_{int} + dW \rightarrow dQ = nC_v dT + PdV \xrightarrow{\div T} \frac{dQ}{T} = nC_v \frac{dT}{T} + \frac{nRT\,dV}{TV}$$

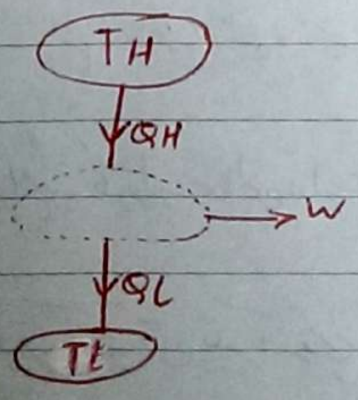
$$\xrightarrow{\int} \Delta S = \int \frac{dQ}{T} = nC_v \ln\frac{T_f}{T_i} + nR \ln\frac{V_f}{V_i}$$

نیروی ناشی از آنتروپی: $dE_{int} = dQ - dW \overset{①}{=} TdS - Fdx$ ، قانون اول / ① $dS = \frac{dQ}{T} \rightarrow dQ = TdS$

$$\xrightarrow{\Delta S=0} TdS = -Fdx \Rightarrow F = -T\frac{dS}{dx}$$

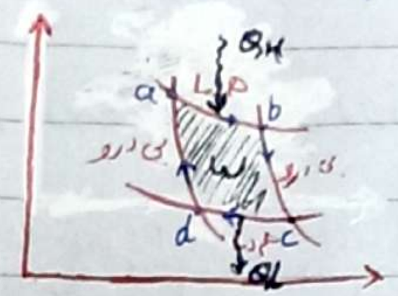
قانون دوم ترمودینامیک: اگر فرآیندی در سامانه‌ای بسته رخ دهد آنتروپی سیستم حین فرآیندهای برگشت ناپذیر افزایش و حین فرآیندهای برگشت پذیر ثابت می‌ماند یعنی آنتروپی هرگز کاهش پیدا نمی‌کند ($\Delta S \geq 0$)

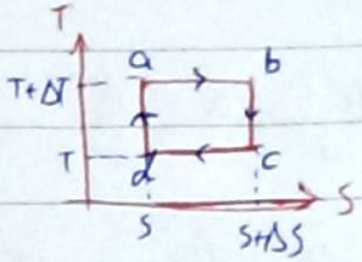
ماشین‌ها: ماشین به هر سیستمی گفته می‌شود که انرژی را به صورت گرما از محیط گرفته و به کار تبدیل می‌کند.



Scanned by CamScanner

ماشین کارنو: چرخه‌ی کارنو یک چرخه‌ی برگشت‌پذیر مشتمل از دو فرایند هم دما و دو فرایند بی‌دررو است.





$$S = \int \frac{dQ}{T} = 0$$

کار چرخه کارنو: قانون اول: $dE_{int} = dQ - dW \rightarrow W = Q = |Q_H| - |Q_L|$

(چون چرخه است $=0$) (گرما گیر) (گرما ده)

تغییرات آنتروپی چرخه کارنو: $\Delta S_T = \Delta S_H - \Delta S_L = \frac{|Q_H|}{T_H} - \frac{|Q_L|}{T_L} = 0 \rightarrow \frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{|Q_L|}{T_L}$

بازده‌ی کارنو: $R_a = \frac{|W|}{|Q_H|} = \frac{|Q_H|-|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_L|}{|Q_H|} = 1 - \frac{T_L}{T_H}$

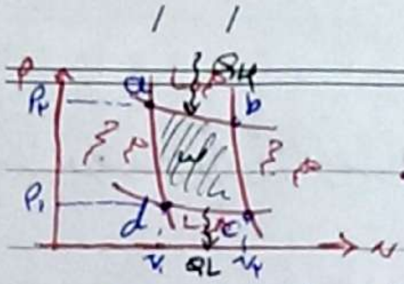
نکته: در چرخه کارنو دو فرایند برگشت‌پذیرند و دو فرایند برگشت‌ناپذیر ولی در چرخه واقعی همه فرایندها برگشت‌ناپذیرند.

نکته: Max بازده یک ماشین بازده ماشین کارنوی آن است.

قانون دوم ترمودینامیک به بیان ماشینی: هیچ رشته فرایندی وجود ندارد که نتیجه آن انتقال انرژی از منبع گرما و تبدیل کامل آن به کار باشد. (اتلاف داریم) (بازده هیچ ماشینی ۱۰۰٪ نیست)

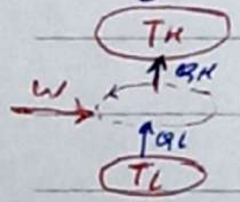
ماشین استرلینگ: ماشین استرلینگ شبیه ماشین کارنو است با این تفاوت که دو انتقال گرمای تک دمای آن با دو فرایند هم حجم به هم وصل شده‌اند و هر چهار فرایند آن تغییر آنتروپی دارند.

Scanned by CamScanner



نکته: بازده ماشین استرلینگ ایده‌آل باز هم از ماشین کارنو کمتر است.

یخچال: انرژی گرمایی $|Q_L|$ از منبع سرد می‌گیرد و روی آن کار انجام داده و بعد انرژی را به منبع بالایی بالاتر می‌برد.

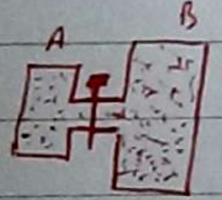


ضریب عملکرد: $K = \frac{|Q_L|}{|W|} = \frac{|Q_L|}{|Q_H|-|Q_L|} = \frac{T_L}{T_H-T_L}$

نکته: یخچال ایده‌آل یخچالی است که بدون کار گرما را از منبع سرد به منبع گرم می‌برد.

قانون دوم ترمودینامیک به بیان یخچالی: هیچ فرآیندی نیست که تنها نتیجه آن انتقال گرما از منبع سرد به گرم باشد.

مثال: فشار گاز آرمانی محفظه A برابر 5×10^5 و دمای آن ۳۰۰ کلوین است. در محفظه B همان گاز با فشار 1×10^5 و دمای ۴۰۰ کلوین قرار دارد و حجم محفظه B، ۴ برابر محفظه A است. شیر اتصال را باز کرده اگر دو محفظه در دمای اولیه نگه داشته شوند فشار نهایی دو محفظه وقتی به تعادل می‌رسند چقدر است؟



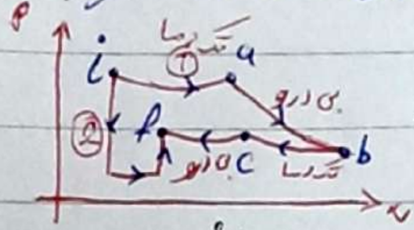
$$n_A+n_B=n'_A+n'_B \xRightarrow{n=\frac{PV}{RT}} \frac{P_AV_A}{RT_A}+\frac{P_BV_B}{RT_B}=\frac{PV_A}{RT_A}+\frac{PV_B}{RT_B} \Longrightarrow \begin{cases} P'_A=P'_B=P \\ T'_A=T_A \\ T'_B=T_B \end{cases}$$

$$\rightarrow 10^5\times\left(\frac{5V_A}{300}+\frac{4V_A}{400}\right)=P\left(\frac{V_A}{300}+\frac{4V_A}{400}\right) \Longrightarrow P=2\times10^5\ Pa$$

/ /

مثال: در صفحه زیر اگر گاز از مسیر 1 از i به f رود، $|Q_{ia}| = 50J$ و $|W_{ab}| = 40J$ و $|W_{bc}| = 30J$ و

$|W_{cf}| = 25J$ می‌باشد. اگر گاز از مسیر 2 از i به f رود تغییر انرژی درونی گاز را محاسبه کنید؟



$$\Delta E_{int①} = \Delta E_{int②} = \Delta E_{int\,ia} + \Delta E_{int\,ab} + \Delta E_{int\,bc} + \Delta E_{int\,cf}$$

$$\Delta E_{int\,ia} = nC_v \Delta T = 0 \rightarrow \Delta E_{int} = Q - W \Rightarrow Q = W = 50J$$

$$\Delta E_{int\,ab} = Q - W = -40J \;/\; \Delta E_{int\,bc} = nC_v\Delta T = 0 \;/\; \Delta E_{int\,cf} = Q - W = 25J \Rightarrow \Delta E_{int\,if} = -15J$$

مثال: گاز آرمانی دو اتمی با ... بطوری در روند بی‌دررو منبسط می‌شود. با فشار و حجم اولیه $1/2\,atm$ و $0/2\,m^3$ و فشار نهایی $2/4\,atm$ چه مقدار کار توسط گاز انجام می‌شود؟

گاز کامل دو اتمی

$$\begin{cases} C_v = \frac{5}{2}R \\ C_p = \frac{7}{2}R \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}$$

$$\begin{cases} P_i = 1/2\,atm \\ V_i = 0/2\,m^3 \end{cases} \rightarrow P_1V_1 = nRT_1 \qquad \begin{cases} P_f = 2/4\,atm \\ V_f = ? \end{cases} \rightarrow P_2V_2 = nRT_2 \quad \Rightarrow \Delta T = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{nR}$$

$$P_iV_i^{\gamma} = P_fV_f^{\gamma} \Rightarrow \frac{P_i}{P_f} = \left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma} \rightarrow V_f = V_i\left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{\gamma^{-1}} = 0/2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}}$$

$$W = -nC_v\Delta T = -nC_v\left(\frac{P_2V_2 - P_1V_1}{nR}\right) = -\frac{5}{2}R\left(\frac{2/4 \times 0/2 \times (0/5)^{\frac{5}{7}} - 1/2 \times 0/2}{R}\right)$$

$W = $ ____

Scanned by CamScanner

/ /

مثال: ۱۳۰g آب ۸۰°C در یک فلاسک عایق بندی شده قرار دارد. ۱۲g یخ صفر درجه به آن اضافه می کنیم.

با فرض معلوم بودن $c_{آب}$ و $c_{یخ}$ و L_f مطلوب است الف) دمای تعادل سیستم ب) تغییر آنتروپی آبی که در آغاز یخ بوده وقتی یخ ذوب می شود؟ ج) تغییر آنتروپی آبی که در آغاز یخ بوده وقتی برای رسیدن به تعادل گرم می شود؟

د) تغییر آنتروپی آب اولیه وقتی با سرد شدن به دمای تعادل می رسد ه) تغییر آنتروپی را کل دستگاه آب و یخ وقتی به دمای تعادل می رسد؟

الف) $\Sigma Q = 0 \rightarrow (mc\Delta T)_{یخ\ آب\ شده} + mL_{f\,(یخ)} + (mc\Delta T)_{آب} = 0$

$0.012 \times 4190 \times (T_f - 0) + 0.012 \times 333000 + 0.13 \times 4190 \times (T_f - 80) = 0 \Rightarrow T_f = 66.7\,°C$

ب) $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_1} = \frac{mL_f}{T} = \frac{0.012 \times 333000}{273} = 14.64\ J/K$ ج) $\Delta S = \int_{273}^{T_f} \frac{dQ}{T} = mc\int_{273}^{339.7} \frac{dT}{T} = 0.012 \times 4190 \ln\frac{339.7}{273} = 10.96\ J/K$

د) $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{353}^{339.7} mc\frac{dT}{T} = 0.13 \times 4190 \ln\frac{339.7}{353} = -20.96\ J/K$ ه) $\Delta S_T = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 4.64$

مثال: الف) طی هر چرخه یک ماشین کارنو ۷۵۰J انرژی به صورت گرما از منبع دمای بالا در ۳۶۰K و منبع دمای پایین در ۲۸۰K جذب می شود. تعیین کنید در هر چرخه چقدر کار انجام می شود. ب) اگر این دستگاه به طور معکوس به صورت یخچال کارنو بین این دو منبع کار کند در هر چرخه برای گرفتن ۱۲۰۰J انرژی به صورت گرما از منبع دمای پایین چقدر کار لازم است؟

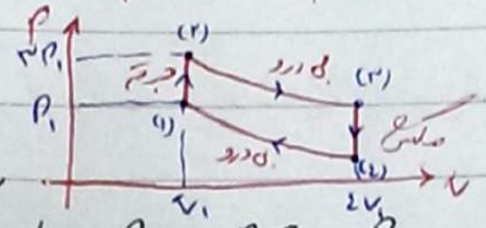
الف) $\frac{|Q_H|}{T_H} = \frac{|Q_C|}{T_C} \rightarrow \frac{|Q_H|}{|Q_C|} = \frac{T_H}{T_C} \rightarrow \frac{360}{280} = \frac{750}{|Q_C|} \Rightarrow |Q_C| = 583.3\,J \rightarrow W = |Q_H| - |Q_C| = 166.7\,J$

ب) $\frac{|Q_H|}{|Q_C|} = \frac{T_H}{T_C} \rightarrow \frac{360}{280} = \frac{W + |Q_C|}{|Q_C|} \Rightarrow \frac{1200 + W}{1200} = \frac{360}{280} \Rightarrow W = 342.9\,J$

Scanned by CamScanner

/ /

مثال: چرخه‌ی فرضی چرخه‌ی یک ماشین بنزینی درون سوز است. مخلوط بنزین هوای مایع شده گازی آرمانی با $\gamma = 1.3$ است. مطلوب است الف) $\frac{T_2}{T_1}$؟ ب) $\frac{T_3}{T_1}$؟ پ) $\frac{T_4}{T}$؟ ت) $\frac{P_3}{P_1}$؟ ث) $\frac{P_4}{P_1}$؟ ج) بازده ماشین را حساب کنید؟



برای گاز آرمانی $= PV = nRT \to \frac{P}{T} =$ ثابت $\Rightarrow \begin{cases} PV^{\gamma} = cte \\ TV^{\gamma-1} = cte \\ T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1} \end{cases}$

الف) $\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{3P_1}{P_1} = 3$

ب) $\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_3}{\frac{1}{3}T_2} = \frac{3T_3}{T_2} \to 3\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = 3\times\left(\frac{V_1}{4V_1}\right)^{\gamma-1} = 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{0.3}$

پ) $\frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{4V_1}\right)^{0.3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{0.3}$

ت) $\frac{P_3}{P_1} = \frac{P_3}{\frac{1}{3}P_2} = \frac{3P_3}{P_2} = 3\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma} = 3\left(\frac{V_1}{4V_1}\right)^{1.3} = 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{1.3}$

ث) $\frac{P_4}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma} = \left(\frac{V_1}{4V_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1.3}$

ج) $1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|} = 1 - \frac{nC_v(T_4 - T_3)}{nC_v(T_2 - T_1)} = 1 - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{0.3}T_1 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{0.3}T_1}{3T_1 - T_1} = 34\%$